ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 07.12.2023

Уважаемые студенты! Сегодня мы с вами рассмотрим решение простейших тригонометрических неравенств.

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся следующие 16 неравенств:

$\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \ge a$, $\sin x \le a$;

$\cos x > a$, $\cos x < a$, $\cos x \ge a$, $\cos x \le a$;

$tgx > a$, $tgx < a$, $tgx \ge a$, $tgx \ge a$;

$ctgx > a$, $ctgx < a$, $ctgx \ge a$, $ctgx \ge a$;

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь МОЖНО СДЕЛАТЬ КРАТКИМ!!!)

Тема: «Простейшие тригонометрические неравенства»

Определение: Неравенство, в котором неизвестная переменная находится под знаком тригонометрической функции, называется **тригонометрическим неравенством.**

1. Неравенства вида $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \ge a$, $\sin x \le a$.

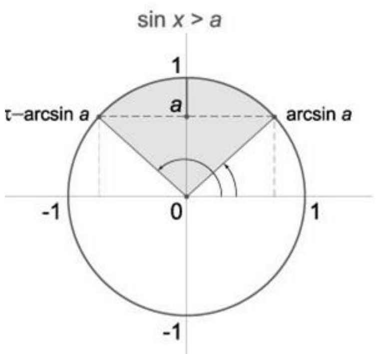


Рис.1

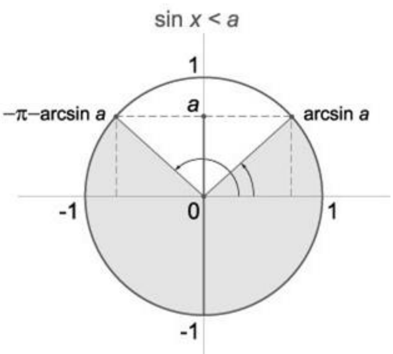


Рис.2

1. ***Неравенство*** $\sin x > a$

При $a \ge 1$ неравенство $\sin x > a$ не имеет решений.

При $a < -1$ решением неравенства $\sin x > a$ является любое действительное число.

При $-1 \le a < 1$ решение неравенства $\sin x > a$ выражается в виде $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ \ n \in Z$ (рис.1).

2. ***Неравенство*** $\sin x \ge a$

При $a > 1$ неравенство $\sin x \ge a$ не имеет решений.

При $a \le -1$ решением неравенства $\sin x \ge a$ является любое действительное число.

При $a=1$ решение неравенства $\sin x \ge a$ сводится к решению уравнения $\sin x = 1$

При $-1 < a < 1$ решение неравенства $\sin x \ge a$ выражается в виде $\arcsin a + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi n, \ \ n \in Z$ (рис.1).

3. ***Неравенство*** $\sin x < a$

При $a \le -1$ неравенство $\sin x < a$ не имеет решений.

При $a > 1$ решением неравенства $\sin x < a$ является любое действительное число.

При $-1 < a \le 1$ решение неравенства $\sin x < a$ выражается в виде $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, \ \ n \in Z$ (рис.2).

4. ***Неравенство*** $\sin x \le a$

При $a < -1$ неравенство $\sin x \le a$ не имеет решений.

При $a \ge 1$ решением неравенства $\sin x < a$ является любое действительное число.

При $a = -1$ решение неравенства $\sin x \le a$ сводится к решению уравнения $\sin x = -1$.

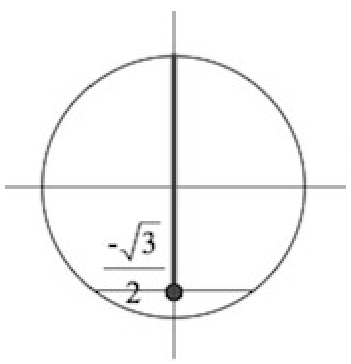
При $-1 < a < 1$ решение неравенства $\sin x \le a$ выражается в виде $-\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le \arcsin a + 2\pi n, \ \ n \in Z$ (рис.2).

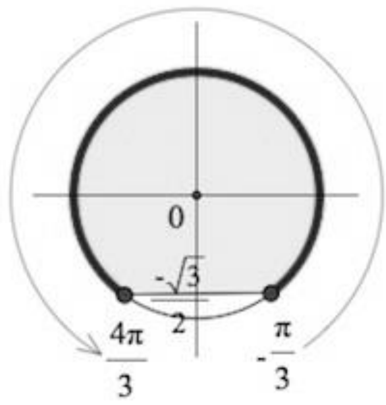
<u>**Пример:**</u>Решить неравенство $\sin x \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

Отмечаем на оси синусов значение $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Все значения $\sin x$ большие $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ расположены выше точки $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ на оси синусов.

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \ \ \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$





Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n \in Z$.

2. Неравенства вида $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\cos x \ge a$, $\cos x \le a$.

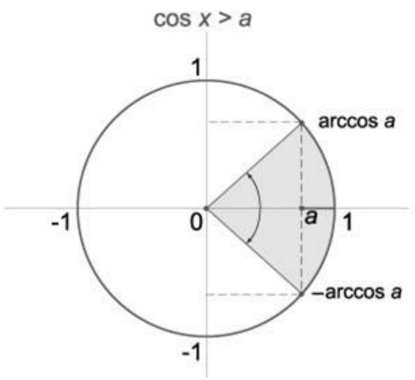


Рис.3

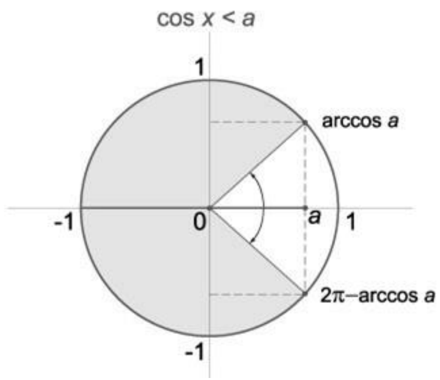


Рис.4

1. ***Неравенство*** $\cos x > a$.

При $a \geq 1$ неравенство $\cos x > a$ не имеет решений.

При $a < -1$ решением неравенства $\cos x > a$ является любое действительное число.

При $-1 \leq a < 1$ решение неравенства $\cos x > a$ выражается в виде $-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,\ \ n \in Z$ (рис.3).

2. ***Неравенство*** $\cos x \geq a$.

При $a > 1$ неравенство $\cos x \geq a$ не имеет решений.

При $a \leq -1$ решением неравенства $\cos x \geq a$ является любое действительное число.

При $a = 1$ решение неравенства $\cos x \geq a$ сводится к решению уравнения $\cos x = 1$

При $-1 < a < 1$ решение неравенства $\sin x \geq a$ выражается в виде $-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n,\ \ n \in Z$ (рис.3).

3. ***Неравенство*** $\cos x < a$.

При $a \leq -1$ неравенство $\cos x < a$ не имеет решений.

При $a > 1$ решением неравенства $\cos x < a$ является любое действительное число.

При $-1 < a \leq 1$ решение неравенства $\cos x < a$ выражается в виде $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ \ n \in Z$ (рис.4).

4. ***Неравенство*** $\cos x \leq a$.

При $a < -1$ неравенство $\cos x \leq a$ не имеет решений.

При $a \geq 1$ решением неравенства $\cos x \leq a$ является любое действительное число.

При $a = -1$ решение неравенства $\cos x \leq a$ сводится к решению уравнения $\cos x = -1$.

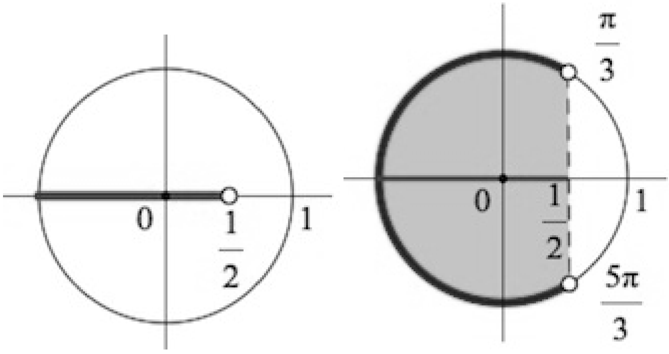
При $-1 < a < 1$ решение неравенства $\cos x \leq a$ выражается в виде $\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ \ n \in Z$ (рис.4).

Пример: Решить неравенство $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

Решение.

Отмечаем на оси косинусов значение $\frac{1}{2}$. Все значения $\cos x$ меньшие $\frac{1}{2}$ расположены левее точки $\frac{1}{2}$ на оси косинусов.

$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, $2\pi-\arccos\frac{1}{2}=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$.



Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z$

3. Неравенства вида $tgx>a$, $tgx<a$, $tgx\ge a$, $tgx\le a$.

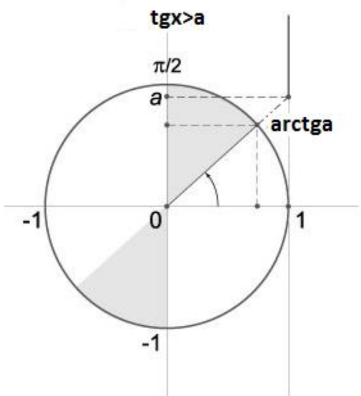


Рис.5

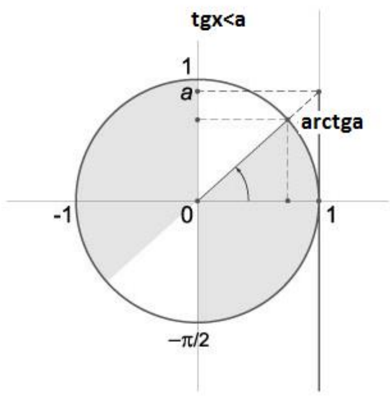


Рис.6

1. **Неравенство** $tgx>a$.

При любом действительном a решение неравенства имеет вид:

$arctga+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z$ (рис.5).

2. **Неравенство** $tgx\ge a$.

При любом действительном a решение неравенства имеет вид:

$arctga+\pi n\le x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z$ (рис.5).

3. **Неравенство** $tgx<a$.

При любом действительном a решение неравенства имеет вид:

$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<arctga+\pi n,\ \ n\in Z$ (рис.6).

4. Неравенство $tgx\le a$.

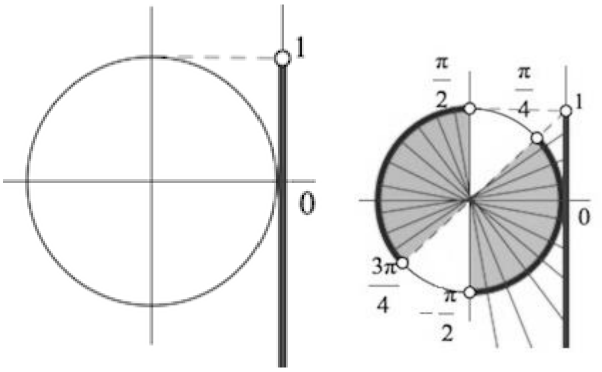
При любом действительном a решение неравенства имеет вид:

$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x \le arctga+\pi n,\ \ n\in Z$ (рис.6).

<u>Пример:</u>Решить неравенство $tgx<1$.

Решение.

Отмечаем на оси тангенсов значение 1. Указываем все значения тангенса, меньшие 1 –**ниже** 1.



Отмечаем все точки тригонометрического круга, значение тангенса в которых будет меньше 1. Для этого мы соединяем каждую точку оси тангенсов ниже 1 с началом координат; тогда каждая проведенная прямая пересечет дважды тригонометрический круг.

Учитывая, что период тангенса равен π, запишем ответ в виде: $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in Z$.

4. Неравенства вида $ctgx>a$, $ctgx<a$, $ctgx\ge a$, $ctgx\le a$.

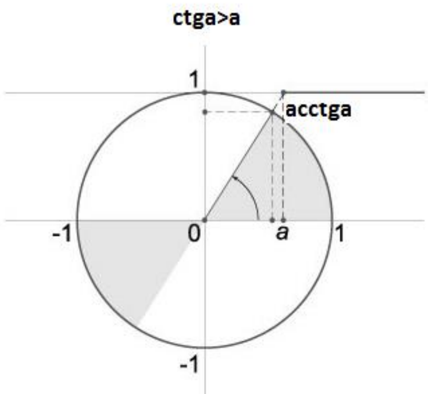


Рис.7

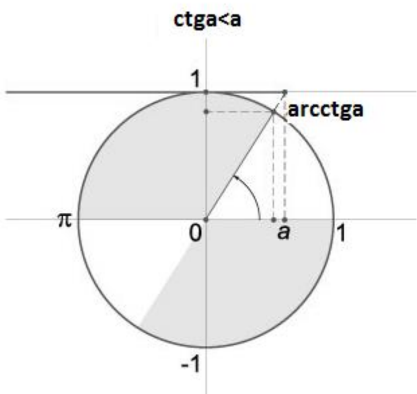


Рис.8

1. **Неравенство** $ctgx>a$.

При любом действительном a решение неравенства имеет вид:
$\pi n < x < arcctga+\pi n,\ \ n\in Z$ (рис.7).

2. **Неравенство** $ctgx\ge a$.

При любом действительном a решение неравенства имеет вид:
$\pi n < x \le arcctga+\pi n,\ \ n\in Z$ (рис.7).

3. **Неравенство** $ctgx<a$.

При любом действительном a решение неравенства имеет вид:
$arcctga+\pi n < x < \pi+\pi n,\ \ n\in Z$ (рис.8).

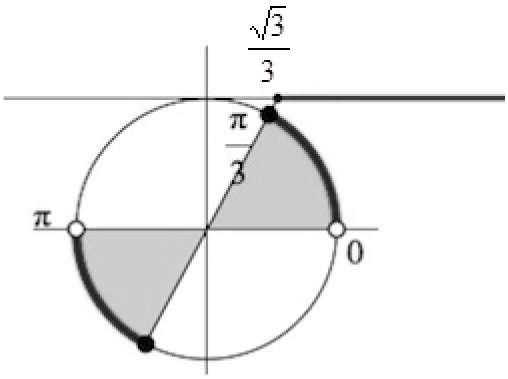
4. Неравенство $ctgx \le a$.

При любом действительном a решение неравенства имеет вид:
$arcctga + \pi n \le x < \pi + \pi n, \quad n \in Z$ (рис.8).

<u>Пример:</u> Решить неравенство $ctgx \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение:

Отмечаем на оси котангенсов значение $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Указываем все значения котангенса, большие $\frac{\sqrt{3}}{3}$ – правее $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Учитывая, что период котангенса равен π, запишем ответ в виде:
$\pi n < x \le \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$.

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru